

RESUME COURT DE LA THESE

L'objectif de cette thèse est d'étudier théoriquement les **comportements limites d'une famille d'agents économiques** par rapport à des perturbations de leur évaluation du risque, celle-ci étant modélisée par des fonctions d'**utilité** concaves. On se placera dans un modèle à temps discret avec incertitude **knightienne**.

Mots clés :

- Probabilités ; Convergence ; Sélection mesurable.
- Finance et économie mathématique ; Fonction d'utilité ; Incertitude de modèle knightienne.

RESUME DE LA THESE

Les crises financières ont souligné l'importance de la prise en compte de l'incertitude de modèle.

Le **risque knightien** ou « **croyances multiples** » suppose que la probabilité réelle prévalant sur l'économie n'est pas connue. Plus précisément, les états de la nature sont représentés grâce à un espace mesurable (Ω, F) ; la vraie probabilité prévalant sur F (la tribu universelle) est supposée inconnue, on sait juste qu'elle appartient à un ensemble de croyances $\mathcal{Q}$, celui-ci **n'étant pas supposé compact ou dominé**. Il n'existe donc pas de probabilité permettant de déterminer les ensembles importants pour l'économie et il faut considérer $\mathcal{Q}$ dans son ensemble, ce qui rend le traitement probabiliste beaucoup plus compliqué que dans le cas de modèles dominés. Cette situation apparaît dans les modèles où la volatilité est inconnue et également dans les modèles à temps discret (par exemple dans un modèle d'arbre il suffit d'avoir de l'incertitude sur une branche).

L'approche dominante en économie, finance et aussi en théorie des jeux est que le comportement des agents face au risque est modélisé par le **critère d'utilité espérée** : un agent préfère X à Y si $E U(X) \geq E U(Y)$, où U est une fonction dite d'utilité de type von Neumann-Morgenstern.

L'aversion au risque est définie comme $-U''/U'$.

Cette modélisation est très puissante, elle permet non seulement de traiter les problèmes de choix de portefeuille puisque l'agent cherche à résoudre le problème

$$u(x) = \sup_{\theta} E U(X_T^{x,\theta}(.)),$$

où $X_T^{x,\theta}$ est la valeur à l'instant T d'une stratégie autofinancée θ de valeur initiale égale à x .

Dans le cadre du **risque knightien**, pour une fonction d'utilité aléatoire, il s'agit de trouver une stratégie qui maximise l'espérance d'utilité dans le cas où la pire croyance se produit parmi toutes celles modélisées dans $\mathcal{Q}$

$$u(x) = \sup_{\theta} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q U(X_T^{x,\theta}(.)) (*).$$

L'existence d'une solution pour (*) dans le cas où U est une fonction d'utilité aléatoire, concave et semi-continue supérieurement, définie sur toute la droite réelle a été prouvé dans Carassus et Ferhoun (2023). Une des hypothèses pour cela est la condition de non-arbitrage quasi-sûre. S'il y a une seule probabilité P , la condition dite de non-arbitrage stipule que

$$NA(P) \forall \theta X_T^{0,\theta} \geq 0 \text{ P - p.s.} \Rightarrow X_T^{0,\theta} \geq 0 \text{ P - p.s.}$$

Si $\mathcal{Q}$ n'est pas réduit à une seule probabilité, Bouchard & Nutz (2015) proposent de définir la condition de non-arbitrage quasi-sûre de la façon suivante

$$NA(\mathcal{Q}) \forall \theta X_T^{0,\theta} \geq 0 \text{ } \mathcal{Q} - \text{q.s.} \Rightarrow X_T^{0,\theta} \geq 0 \text{ } \mathcal{Q} - \text{q.s.}$$

où une propriété est dite vraie $\mathcal{Q}$ -q.s. si et seulement s'il existe A dans F tel que $Q(A)=1$ pour tout Q dans $\mathcal{Q}$ et A est inclus l'ensemble des états de la nature où la propriété est vraie.

Une autre hypothèse est l'élasticité asymptotique raisonnable en plus et moins l'infini, i.e.

$$AE_+(U) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{U'(x)x}{U(x)} < 1 < AE_-(U) = \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{U'(x)x}{U(x)}.$$

L'approche de l'utilité espérée permet aussi de mettre au point des règles d'évaluation prenant en compte les préférences des agents. Ainsi, le **prix de réservation** ou prix d'indifférence est défini de façon implicite, comme étant la plus petite valeur z pour laquelle on préfère, selon le critère d'espérance d'utilité, recevoir $x+z$ et livrer la variable aléatoire G plutôt que de ne rien faire, c'est-à-dire

$$p(G, x) = \inf\{z, u(G, x + z) \geq u(0, z)\},$$

Où

$$u(G, x) = \sup_{\theta} \inf_Q E_Q U \left(\cdot, X_T^{x,\theta}(\cdot) - G(\cdot) \right).$$

Enfin, le **prix de sur-réplication** est un prix, ne dépendant pas des préférences et permettant de pouvoir toujours couvrir G

$$\pi(G) = \inf\{z, \exists \theta, X_T^{z,\theta} \geq G\}.$$

L'inégalité est vraie P -p.s. dans le cas d'une seule croyance et $\mathcal{Q}$ -q.s. dans le cas d'un ensemble $\mathcal{Q}$ de croyances non-dominées.

Dans cette thèse, nous supposons que les préférences sont modélisées par une suite $(U_n)_n$ de fonctions d'utilité concaves définies sur R et convergeant vers U . Nous travaillerons dans des marchés à temps discret.

L'objectif est de trouver les conditions sur la convergence de $(U_n)_n$ vers U , sur les élasticités asymptotiques et sur la condition $NA(\mathcal{Q})$ pour obtenir **la convergence des stratégies optimales ainsi que des prix de réservation** associés à $(U_n)_n$ vers ceux associés U . Et sous des hypothèses supplémentaires, **estimer les vitesses de convergence**. Il s'agira aussi de donner des contre-exemples montrant le caractère nécessaire de nos hypothèses.

Ces résultats généraliseront ceux de Carassus & Rasonyi (2007) établis dans le cas d'une seule croyance.

Dans un premier temps, nous supposons que tous les agents ont la même incertitude knigtienne, i.e. le même $\mathcal{Q}$. Puis, nous considérerons une suite d'ensembles de croyances $(\mathcal{Q}_n)_n$. Dans ce contexte, nous étudierons également la convergence, avec l'aversion pour le risque, du **prix de réservation** vers le prix de **sur-réplication**. Ce résultat généralisera celui de Blanchard et Carassus (2021) établi dans le cas où tous les agents ont le même ensemble de croyances $\mathcal{Q}$.

Il faudra étudier les conditions sur $(\mathcal{Q}_n)_n$ pour obtenir pour obtenir les convergences.

Les outils mathématiques de l'incertitude quasi-sure sont les ensembles analytiques (noyaux de Suslin sur la tribu Borélienne) ou bien les noyaux de Suslin de la tribu produit entre la tribu universelle sur X et la tribu borélienne sur Y , où X et Y sont des espace Polonais (voir Bertsekas & S. Shreve (2004)). En effet, sur ces ensembles, il est possible de faire de la sélection mesurable (Théorème de Jankov von Neumann, généralisé par Leese). Très récemment les ensembles projectifs ont également montré tout leur intérêt pour ce type de problèmes liés à l'incertitude Knigtienne.

Bibliographie partielle du projet de thèse :

- D.P. Bertsekas et S. Shreve «Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case», Athena Scientific, 2004.
- L. Carassus et R. Blanchard « Convergence of utility indifference prices to the superreplication price in a multiple-priors framework », *Mathematical Finance* Vol 31, pp 366–398, 2021
- L. Carassus et M. Ferhouné « Discrete time optimal investment under model uncertainty», arXiv: 2307.11919
- L. Carassus and M. Rásonyi. Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do. *Mathematics of Operations Research*, 2007
- F. Knight. *Risk, Uncertainty, and Profit*. Boston, MA: Hart, Schaffner Marx; Houghton MifflinCo, 1921.

PLAN DE REALISATION

- Début : Novembre 2025 (début possible sur tout 2025).
- Année 2025-2026 : lecture de la bibliographie, travaux sur la convergence des fonctions valeurs et des prix de réservation dans le cas où $\mathcal{Q}$ ne dépend pas de n ,
- Année 2026-2027 : généralisation au cas d'une suite $(\mathcal{Q}_n)_n$.
- Année 2027-2028 : travaux sur la convergence du prix de réservation vers le prix de surréplication avec l'aversion pour le risque. Rédaction de la thèse.
- Fin : Septembre 2028.

UNITE DE RECHERCHE ET ENCADREMENT

L'unité de recherche est le MICS à CentraleSupélec, université Paris-Saclay et son équipe de recherche Fiquant.

<https://www.centralesupelec.fr/fr/mics-laboratoire-mathematiques-et-informatique-pour-la-complexite-et-les-systemes>

La thèse sera encadrée par Laurence CARASSUS.

Contact : laurence.carassus@centralesupelec.fr